



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



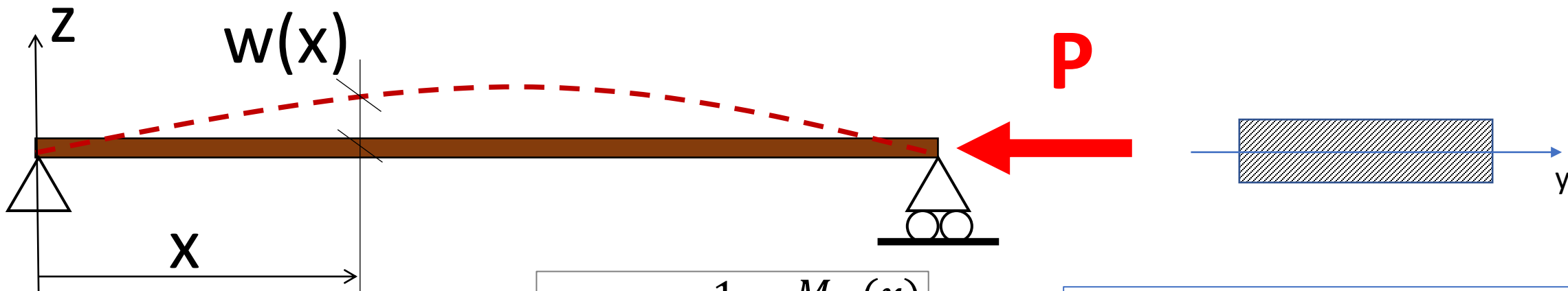
Wykład 14A

Wyboczenie pręta

(Utrata stateczności)

Wyboczenie pręta idealnego

Ściskany smukły pręt idealnie prosty może utracić stateczność (znaleźć nową postać równowagi)



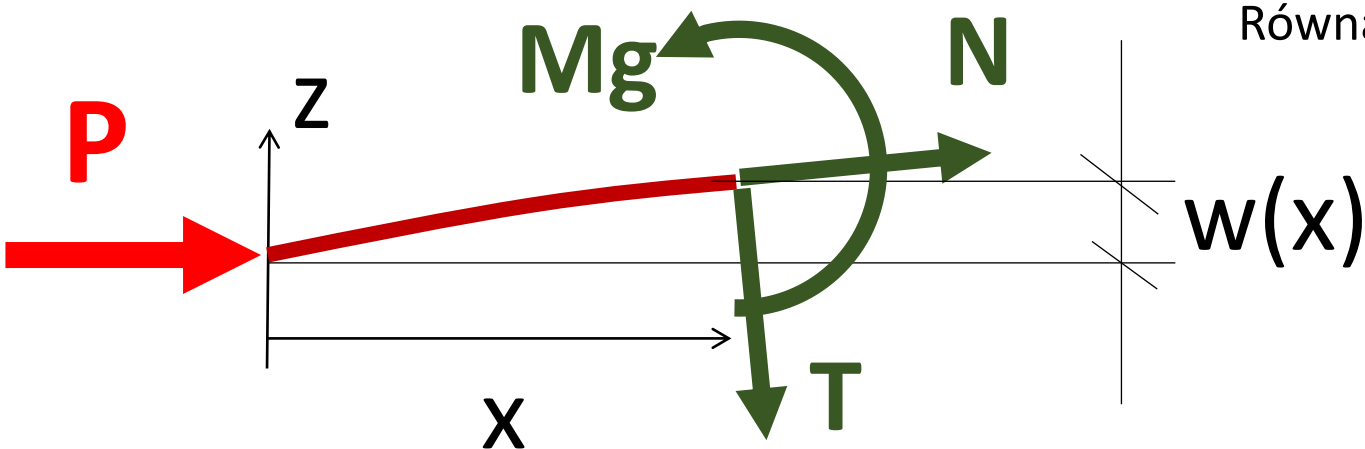
$$w''(x) \cong \frac{1}{\rho} = \frac{M_g(x)}{E J_y}$$

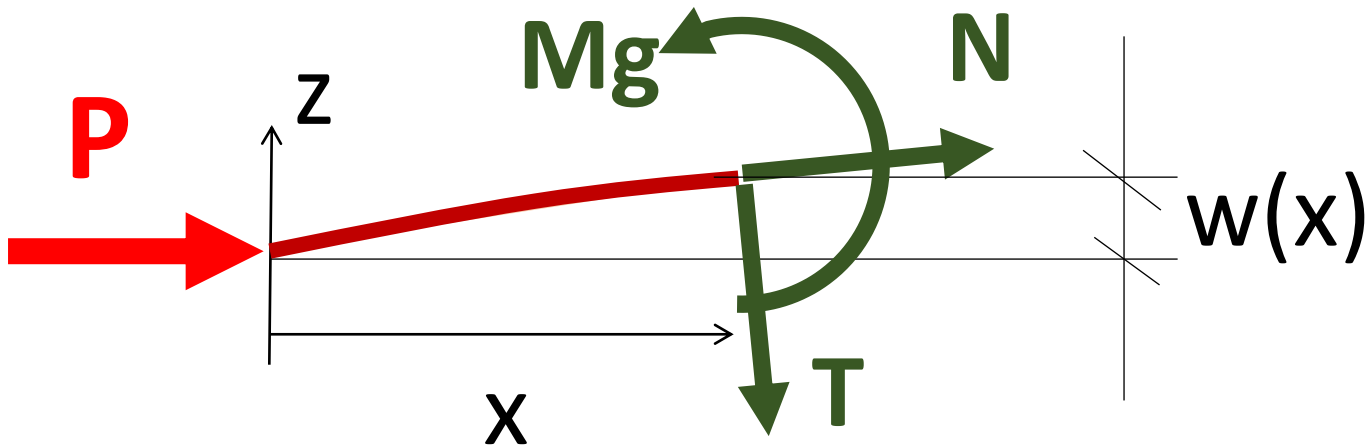
$$M_g(x) = E J_y w''(x)$$

Równanie równowagi momentów wzgl. pkt. przecięcia:

$$M_g(x) + P w(x) = 0$$

$$E J_y w''(x) + P w(x) = 0$$





Podstawmy: $k^2 = \frac{P}{E J_y}$

Wtedy:

$$E J_y w''(x) + P w(x) = 0$$

$$w''(x) + \frac{P}{E J_y} w(x) = 0$$

$$w''(x) + k^2 w(x) = 0$$

(Równanie różniczkowe jednorodne)

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego jednorodnego:

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

Warunki brzegowe:

$$w(0) = 0 \rightarrow A \sin 0 + B \cos 0 = 0 \rightarrow B = 0$$

$$w(l) = 0 \rightarrow A \sin kl = 0 \rightarrow kl = \pi, 2\pi, \dots, n\pi \rightarrow k^2 = \frac{\pi^2}{l^2}, 4 \frac{\pi^2}{l^2}, \dots, n^2 \frac{\pi^2}{l^2}$$

Obciążenie krytyczne

$$k^2 = \frac{P}{E J_y}$$

oraz

$$k^2 = \frac{\pi^2}{l^2}, 4 \frac{\pi^2}{l^2}, \dots, n^2 \frac{\pi^2}{l^2}$$

$$P_{kr} = k^2 E J_y$$

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E J_y}{(l/n)^2}$$

$$l_s = l/n$$

- długość swobodna (długość półfali)

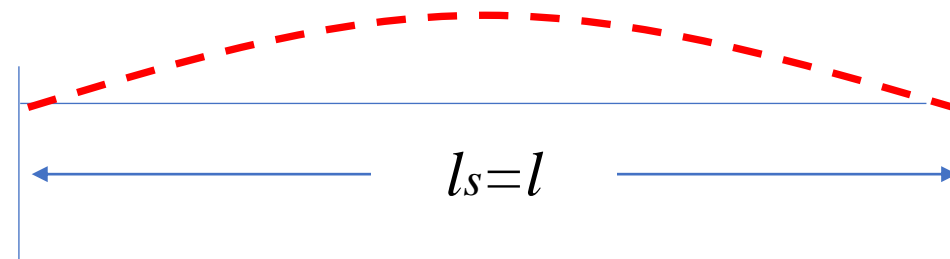
Wzór Eulera:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{l_s^2}$$

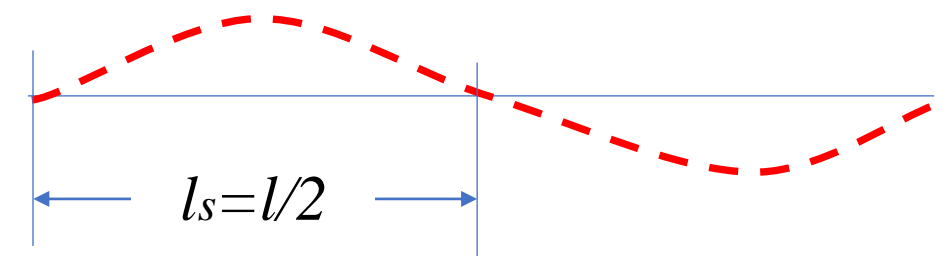
Obciążenie krytyczne

Interesuje nas zawsze najniższa wartość siły krytycznej !

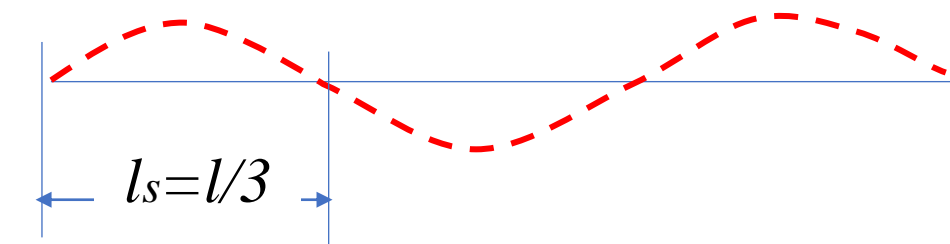
n=1



n=2

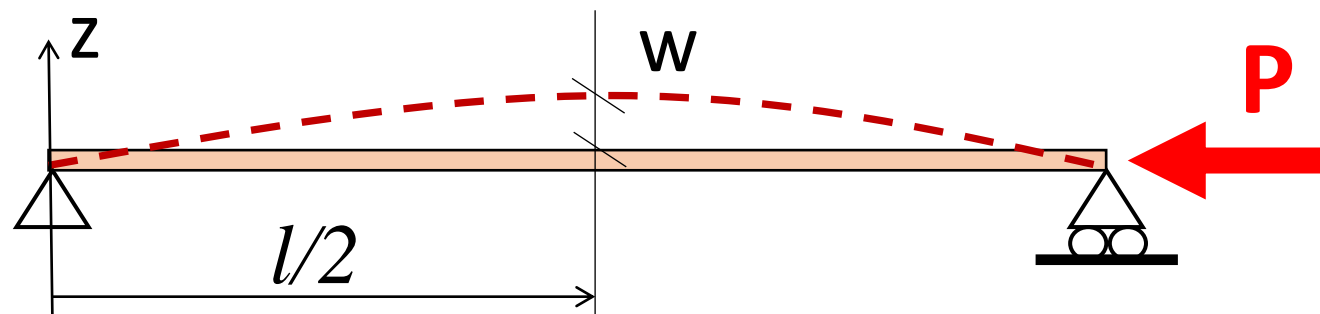
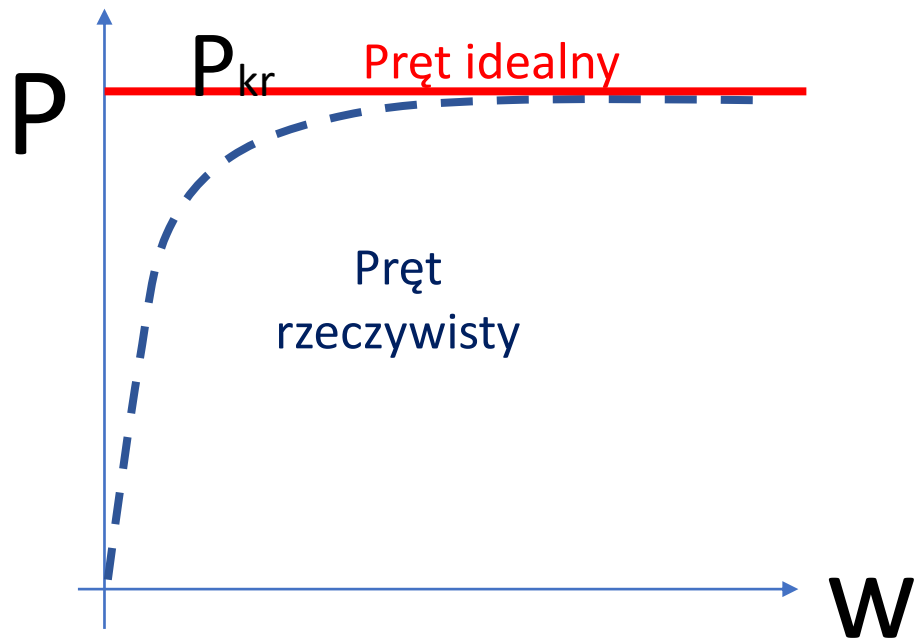


n=3

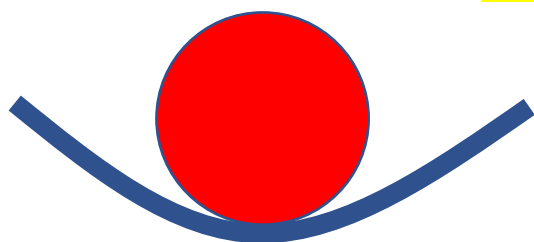


Postaci utraty stateczności:

Wyboczenie pręta rzeczywistego

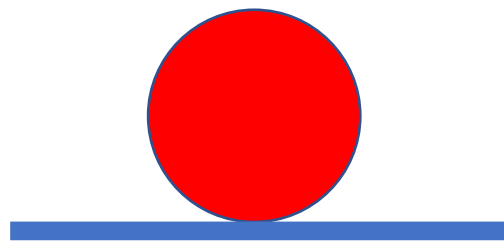


Interpretacja energetyczna siły krytycznej



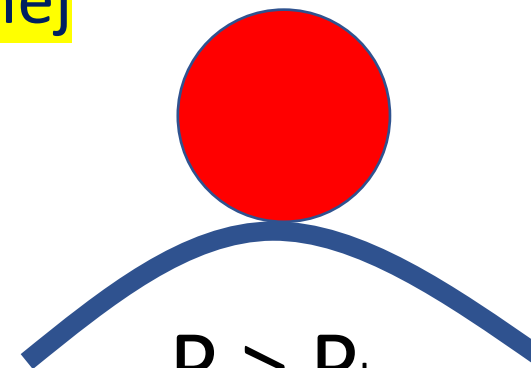
$$P < P_{kr}$$

Równowaga trwała



$$P = P_{kr}$$

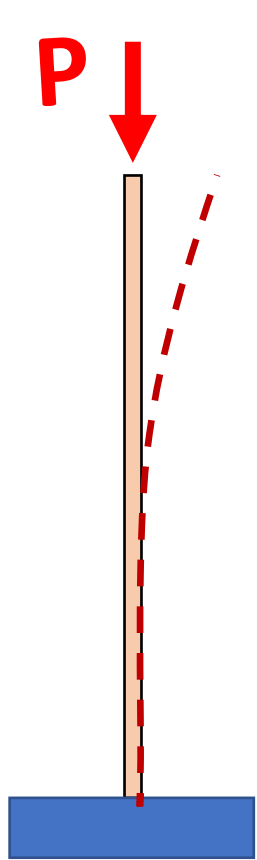
Równowaga obojętna



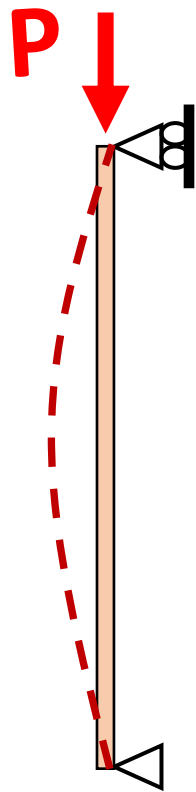
$$P > P_{kr}$$

Równowaga chwiejna

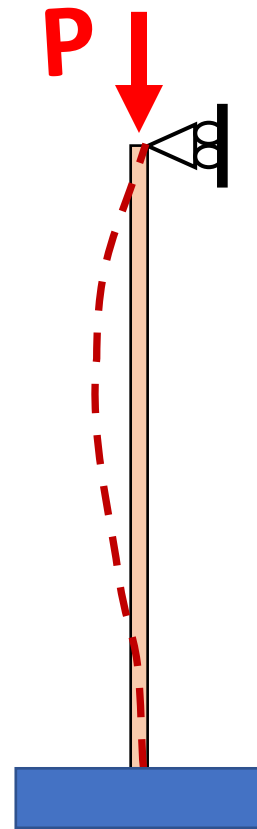
Typowe przypadki wyboczenia sprężystego



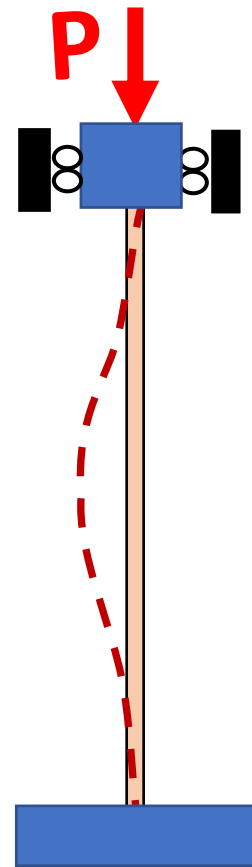
$$l_s = 2l$$



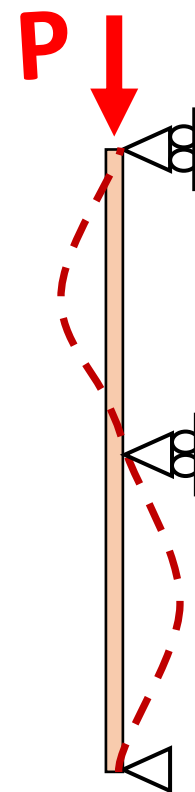
$$l_s = l$$



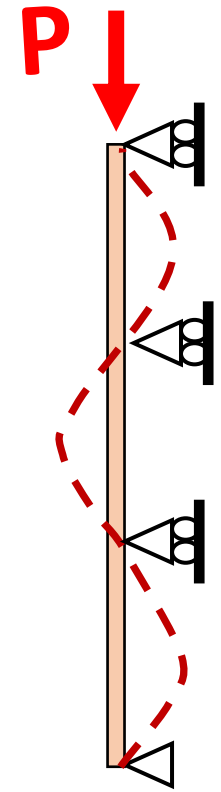
$$l_s = 0,7 l$$



$$l_s = l/2$$



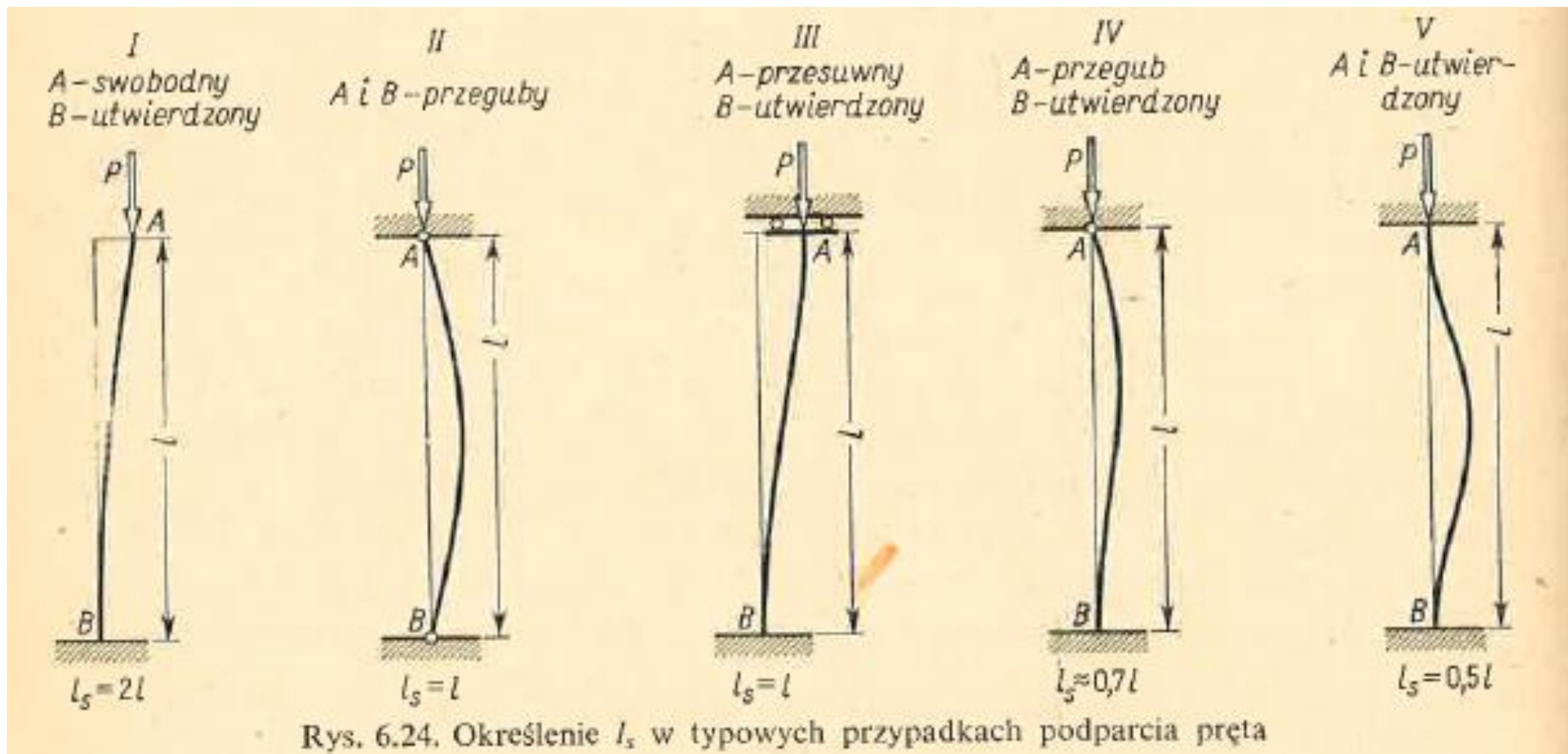
$$l_s = l/2$$



$$l_s = l/3$$

l_s - długość swobodna = długość półfali (intuicja inżynierska!)

Typowe przypadki wyboczenia sprężystego



Naprężenia krytyczne

Wzór Eulera:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{l_s^2}$$

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 E \left(\frac{J_{min}}{A} \right)}{l_s^2}$$

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{max}^2}$$

smukłości

$$\lambda_y = \frac{l_{s_y}}{\sqrt{\frac{J_y}{A}}} = \frac{l_{s_y}}{i_y}$$

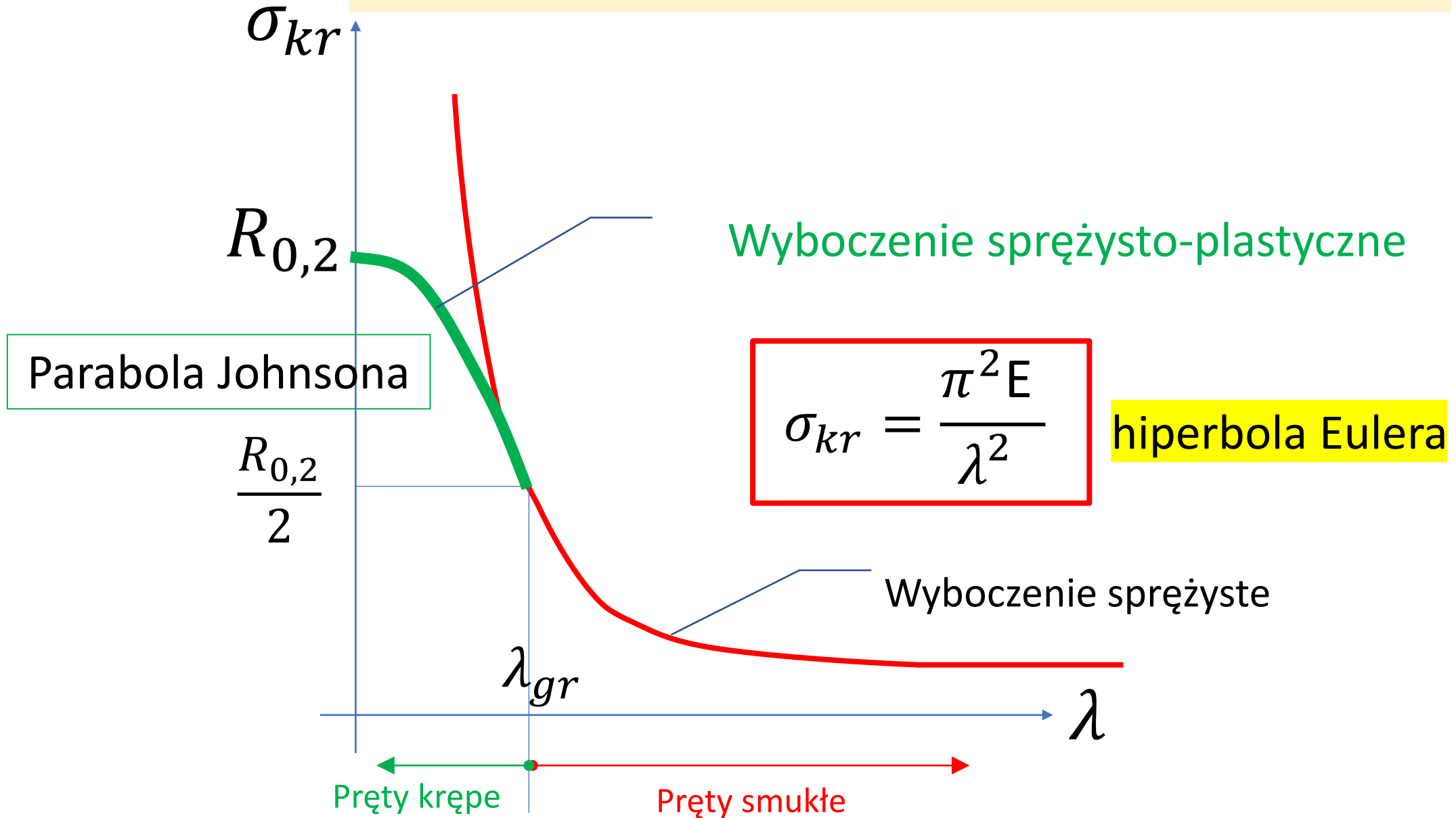
$$\lambda_z = \frac{l_{s_z}}{\sqrt{\frac{J_z}{A}}} = \frac{l_{s_z}}{i_z}$$

Promienie bezwładności

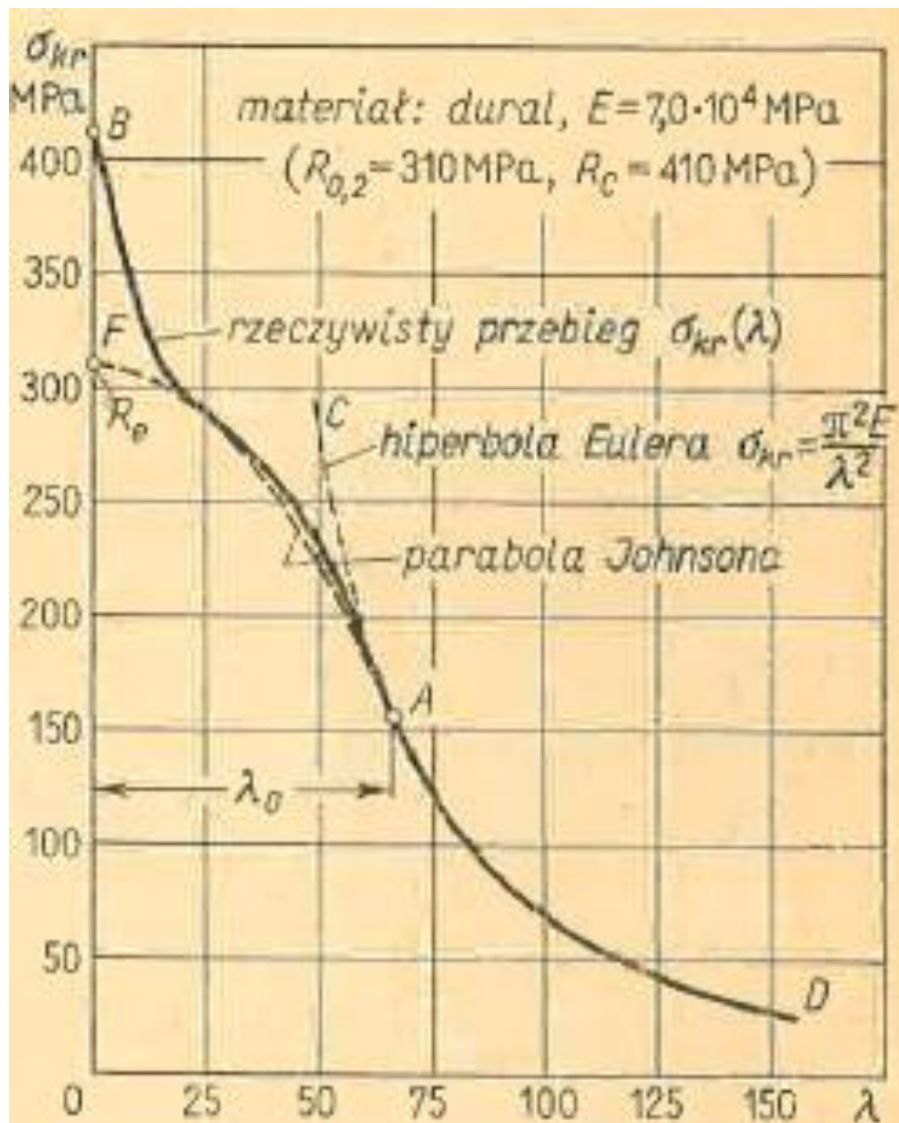
$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}$$

Dla materiałów bez wyraźnej granicy plastyczności



Dla materiałów bez wyraźnej granicy plastyczności

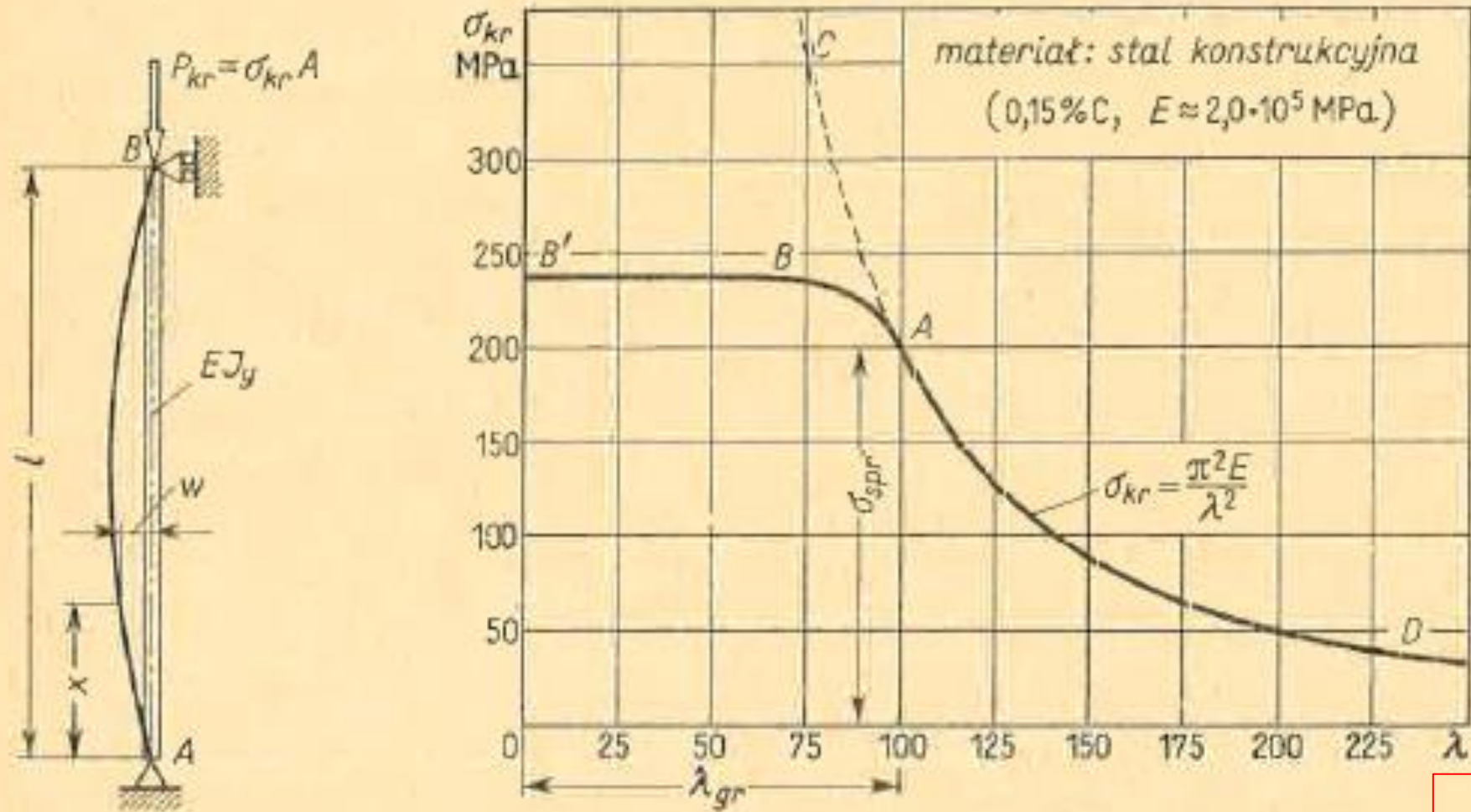


Rys. 6.23. Typowy wykres $\sigma_{kr}(\lambda)$ dla materiału bez wyraźnej granicy plastyczności

$$P_{dop} = \frac{P_{kr}}{n_{kr}}$$

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{2E/R_{0,2}}, \quad (\sigma_{kr})_A = R_{0,2}/2.$$

Dla materiałów z wyraźną granicą plastyczności



Rys. 6.22. Analiza naprężenia krytycznego w funkcji smukłości

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{E / \sigma_{prop}}$$